ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА УПРАВЛЯЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

З. Н. Мурзабеков, А. З. Мурзабеков*

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 050040, Алма-Ата, Казахстан,
* Международный университет информационных технологий, 050040, Алма-Ата, Казахстан

УДК 517.977.55

Рассматривается задача оптимального управления нестационарными нелинейными системами с закрепленными концами траекторий. Получен алгоритм управления для одного класса нелинейных систем с ограничениями на управления на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: задача оптимального управления, дифференциальные уравнения, метод множителей Лагранжа, нелинейная система, функционал.

The problem of optimal control with the fixed ends of trajectories is considered. The algorithm of control for one class of nonlinear systems with restrictions on controls on a final interval of time is received.

Key words: problem of optimal control, differential equations, method of multipliers of Lagranzhe, nonlinear system, functional.

Введение. Математическая теория процессов управления возникла из потребностей прикладных дисциплин. Ее развитие началось с создания средств управления движением и конструирования автоматических устройств различного назначения. Теория процессов управления используется при исследовании динамики робототехнических и электроэнергетических систем, химических и ядерных реакторов, биологических и экологических процессов, экономических и финансовых моделей. В настоящее время теория процессов управления применяется также при создании коммуникационных систем и конструировании средств автоматизации новых поколений с использованием компьютерной техники и передовых информационных технологий.

В основе решения задач оптимального управления лежит принцип максимума Понтрягина (решение сводится к соответствующей краевой задаче) [1, 2] и динамическое программирование (задача сводится к решению уравнения Беллмана) [3].

Основной проблемой современной теории управляемых движений является решение задач синтеза управлений с учетом различных ограничений. Эта проблема чрезвычайно актуальна, но еще недостаточно разработана. Теория может привести к новым направлениям в динамической оптимизации, теории дифференциальных уравнений, вычислительной математике. Разработка различных способов построения алгоритмов управления, обладающих необходимыми для приложений свойствами, является актуальной задачей современных информационных технологий [4].

Работа рекомендована к публикации Программным комитетом VIII Международной азиатской школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”.

В настоящей работе предлагается конструктивный метод построения синтезирующего управления для нелинейной управляемой системы, основанный на принципе обратной связи с учетом ограничений на управления [5, 6].

Постановка задачи. Рассмотрим класс нелинейных управляемых систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(t), \;\; t \in (t_0, T), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \;\; \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T; \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(t) \in U(t) = \{\mathbf{u} | \boldsymbol{\alpha}(t) \le \mathbf{u}(t) \le \boldsymbol{\beta}(t), \;\; t \in (t_0, T), \;\; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in C[t_0, T]\} \subset L_2((t_0, T), R_m), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор управляющих воздействий размерности $m \times 1$; $\mathbf{f}(t)$ — заданная вещественная, непрерывная и ограниченная при $t \in [t_0, T]$ векторная функция размерности $n \times 1$; $A(t)$, $B(t)$ — заданные непрерывные и ограниченные матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$ соответственно; $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ — заданный непрерывный по $(\mathbf{x}, t)$ и ограниченный при $t \in [t_0, T]$ вектор размерности $n \times 1$; $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_T$ — заданные векторы.

Обозначим через $\Delta(t_0, T, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T)$ множество допустимых пар $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$:

$$\Delta(t_0, T, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}): \; \mathbf{u}(t) \in U(t), \quad \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(t),$$
$$t_0 < t < T, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T\}. \tag{3}$$

Пусть на множестве допустимых пар (3) задан функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)^* Q(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_T)^* R(t)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_T)]\, dt, \tag{4}$$

где $Q(t)$, $R(t)$ — заданные симметричные непрерывные и ограниченные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, удовлетворяющие условию $Q(t) \ge 0$ (неотрицательно-определенная матрица); $R(t) > 0$ (равномерно положительно-определенная матрица).

Задача: найти синтезирующее управление $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, такое что соответствующая ему пара $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \in \Delta(t_0, T, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T)$ и доставляет минимальное значение функционалу (4).

Для решения поставленной задачи с помощью множителей Лагранжа специального вида образуем вспомогательный функционал. Для этого прибавим к выражению для функционала (4) систему дифференциальных уравнений (1) с множителем $\boldsymbol{\lambda} = K(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \mathbf{q}(t)$ и выражение $\boldsymbol{\lambda}_1^*(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}_2^*(\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\lambda}_1 \ge 0$; $\boldsymbol{\lambda}_2 \ge 0$. В результате получаем функционал

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{T} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)^* Q(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_T)^* R(t)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_T) + (K(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{q}(t))^*(A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(t) - \dot{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\lambda}_1^*(\mathbf{x}, t)(\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}_2^*(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}(t))\right] dt, \tag{5}$$

где $\mathbf{q}(t)$ — вектор размерности $n \times 1$; $K(t)$ — симметричная положительно-определенная матрица размерности $n \times n$.

Множитель $\boldsymbol{\lambda} = K(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \mathbf{q}(t)$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$ в виде системы дифференциальных уравнений (1), а функции $\{\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x}, t)\}$ — соответствующие ограничения, налагаемые на управления (2).

Для рассматриваемой задачи метод множителей Лагранжа (принцип освобождения от связей) состоит в следующем: исходная задача оптимального управления с ограничениями сводится к другой задаче, но уже без ограничений. При этом новая задача формулируется таким образом, чтобы ее решение являлось решением первоначальной задачи.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$v(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)^*K(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)^*\mathbf{q}(t),\qquad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}=K(t)\mathbf{x}+\mathbf{q}(t),$$

$$M(\mathbf{x},\mathbf{u},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)^*[Q(t)+\dot K(t)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)+\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_T)^*R(t)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_T)+$$
$$+(K(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)+\mathbf{q}(t))^*(A(t)\mathbf{x}+B(t)\mathbf{u}+\mathbf{d}(\mathbf{x},t)+\mathbf{f}(t))+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)\dot{\mathbf{q}}(t)+$$
$$+\boldsymbol{\lambda}_1^*(\mathbf{x},t)(\boldsymbol{\alpha}(t)-\mathbf{u})+\boldsymbol{\lambda}_2^*(\mathbf{x},t)(\mathbf{u}-\boldsymbol{\beta}(t)).$$

Тогда справедливо следующее представление функционала (5):

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u})=v(\mathbf{x}_0,t_0)+\int_{t_0}^{T}M(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt. \tag{6}$$

Решение задачи. Алгоритм решения задачи реализуется путем задания матриц $K(t)$, $W(t,T)$ и функций $\{\,\mathbf{q}(t),\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x},t)\}$, соответствующих условию допустимости пары $\{\tilde{\mathbf{x}}(t),\ \tilde{\mathbf{u}}(t)\}$, т. е. $\{\tilde{\mathbf{x}}(t),\ \tilde{\mathbf{u}}(t)\}\in\Delta(t_0,\,T,\,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)$.

Проведем выбор $(K,\ W,\ \mathbf{q},\ \boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2)$, так чтобы при каждом фиксированном $t\in(t_0,T)$ функция $M(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ достигала наименьшего значения на паре $(\tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{u}})$. Если при этом функция $\tilde{\mathbf{x}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при управлении $\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ с условиями (2), то пара $(\tilde{\mathbf{x}}(t),\tilde{\mathbf{u}}(t))$ является искомым решением поставленной задачи.

Методами дифференциального исчисления из (6) находим управление, доставляющее минимальное значение функции $M(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}_T=-R^{-1}(t)[B^*(t)(K(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)+\mathbf{q}(t))-\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x},t)+\boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x},t)]. \tag{7}$$

Обозначим $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)=-R^{-1}(t)[-\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x},t)+\boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x},t)]$. Тогда синтезирующее управление (7) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}_T=-R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_T)+\mathbf{q}(t))+\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t). \tag{8}$$

Множители $\boldsymbol{\lambda}_1\geq 0,\ \ \boldsymbol{\lambda}_2\geq 0$ заданы таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\boldsymbol{\lambda}_1^*(\mathbf{x},t)(\boldsymbol{\alpha}(t)-\tilde{\mathbf{u}})=0,\quad \boldsymbol{\lambda}_2^*(\mathbf{x},t)(\tilde{\mathbf{u}}-\boldsymbol{\beta}(t))=0. \tag{9}$$

Для этого осуществлен выбор $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\varphi}$ в виде

$$\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x},t)=-R(t)\inf(0,\,w(\mathbf{x},t)-\boldsymbol{\alpha}(t)),\ \boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x},t)=-R(t)\inf(0,\,\boldsymbol{\beta}(t)-w(\mathbf{x},t)); \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)=-\inf(0,\,w(\mathbf{x},t)-\boldsymbol{\alpha}(t))+\inf(0,\,\boldsymbol{\beta}(t)-w(\mathbf{x},t)), \tag{11}$$

где $w(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}_T-R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)(\tilde{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}_T)+\mathbf{q}(t))$.

Матрицы $K(t),\ \ W(t,T),\ \ t\in[t_0,\,T]$ и функция $\mathbf{q}(t)$ заданы следующим образом:

$$\dot K+KA(t)+A^*(t)K-KB(t)R^{-1}(t)B^*(t)K+Q(t)=0,\ \ K(t_0)=K_0; \tag{12}$$

$$\dot W=WA_1^*(t)+A_1(t)W-B_1(t),\quad W(T,T)=0; \tag{13}$$

$$\dot{\mathbf{q}}=-A_1^*(t)\mathbf{q}-K(t)\mathbf{f}_1(t)+W^{-1}(t,T)B(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t),\ \ \mathbf{q}(t_0)=W^{-1}(t_0,T)[\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}_T-\mathbf{y}(t_0)]. \tag{14}$$

Здесь

$$A_1(t) = A(t) + D(\mathbf{x}_T, t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t), \quad B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t),$$

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T, t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - D(\mathbf{x}_T, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + A\mathbf{x}_T + B\mathbf{u}_T, \quad D(\mathbf{x}_T, t) = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}}, \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_T.$$

Пусть существуют решения уравнений (11)–(13) и выполнены условия (8). Тогда дифференциальные уравнения, определяющие закон движения системы (1) с управлением $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_1(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) - B_1(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T, t) + B(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{15}$$

Используя решения дифференциальных уравнений (13), (14), аналогично [5, 6] получаем, что состояние системы (14), соответствующее управлению (8), в конечный момент времени равно $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$.

Действительно, выполнение краевых условий (2) следует из соотношения

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_T = W(t, T)\,\mathbf{q}(t) + \mathbf{y}(t), \ \ t \in [t_0, T],$$

где функция $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{y}} = A_1(t)\mathbf{y} + (W(t, T)K(t) + E)\,\mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T, t), \ \ \mathbf{y}(T) = 0. \tag{16}$$

Найдем минимальное значение функционала (6)

$$L(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T)^* K(t_0)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T) + \frac{1}{2}\mathbf{q}^*(t_0)W(t_0, T)\mathbf{q}(t_0) + \\ + \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^*(\tilde{\mathbf{x}}, t)R(t)\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{y}^*(t)K(t)\mathbf{f}(t)\right] dt.$$

Результаты, полученные при решении поставленной задачи, сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. *Для оптимальности пары* $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \in \Delta(t_0, T, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ *в задаче* (1), (2), (4) *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) функция $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ *удовлетворяла дифференциальному уравнению*

$$\dot{\mathbf{x}} = A_1(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) - B_1(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T, t) + B(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \tag{17}$$

с условиями $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$;

2) *управление* $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ *определялось формулой*

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_T - R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \mathbf{q}(t)) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), \tag{18}$$

где матрицы $K(t), W(t, T)$ *являются решениями уравнений* (11) *и* (12), *функция* $\mathbf{q}(t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (13), *а функция* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ *определена в виде* (10).

Алгоритм решения задачи на ПЭВМ. Опишем удобный для реализации на ПЭВМ алгоритм решения задачи оптимального управления (1), (2), (4).

1. Используя метод Рунге — Кутты, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (11), (12) для определения матриц $K(t)$, $W(t,T)$ в интервале $[t_0,T]$ с условиями $K(t_0)=K_0$, $W(T,T)=0$.

Следует отметить, что K_0 — произвольная симметричная положительно-определенная $(n\times n)$-матрица. При задании различных начальных условий $K(t_0)=K_0$ для матричного дифференциального уравнения (12) получаем различные матрицы $K(t)$ и $W(t,T)$. Однако при этом получается одна и та же вектор-функция $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ вида (17), поскольку задача имеет единственное решение. При вычислении вектор-функции $\mathbf{q}(t)$ по формуле (13) влияние матрицы $K(t)$ компенсируется.

2. Задать условия $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}_T$ и вычислить $\mathbf{q}(t_0)=W^{-1}(t_0,T)(\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{y}(t_0))$.

3. Используя метод Рунге — Кутты, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (13), (15), (16) в интервале $[t_0,T]$, задав начальные условия $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}(T)=0$, $\mathbf{q}(t_0)=W^{-1}(t_0,T)(\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{y}(t_0))$. В процессе интегрирования системы (13), (16) на печать необходимо вывести графики оптимальной траектории $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и оптимального управления $\tilde{\mathbf{u}}(t)$. Если необходимо провести расчеты для новых условий $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}_T$, то повторить пп. 2, 3.

Заключение. Предложен новый подход построения синтезирующего управления, основанного на принципе обратной связи и приводящего динамическую систему в требуемое состояние за конечное время при наличии ограничений на управления. Задача решена с использованием множителей Лагранжа, зависящих от фазовых координат и времени. За счет выбора $\boldsymbol{\lambda}_0(\mathbf{x},t)=K(t)\mathbf{x}+\mathbf{q}(t)$ удается построить оптимальное управление по принципу обратной связи, а $\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{x},t)\geq 0$ и $\boldsymbol{\lambda}_2(\mathbf{x},t)\geq 0$ выбираются таким образом, чтобы были выполнены условия дополняющей нежесткости в методе множителей Лагранжа.

Список литературы

1. Атанс М. Оптимальное управление. Введение в теорию и приложения / М. Атанс, П. Фалб. М.: Машиностроение, 1968.

2. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Наука, 1976.

3. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. М.: Наука, 1968.

4. Куржанский А. Б. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 12–22.

5. Мурзабеков З. Н. Достаточные условия оптимальности динамических систем управления с закрепленными концами // Мат. журн. 2004. № 2. С. 52–59.

6. Мурзабеков З. Н. Конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для линейных нестационарных управляемых систем при наличии внешних воздействий и ограничений на управления // Докл. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2009. № 3. С. 16–21.

Мурзабеков Заинелхриет Нугманович — д-р техн. наук, проф. Казахского национального университета им. аль-Фараби; тел. (727) 262-72-80; e-mail: murzabekov-zein@mail.ru;
Мурзабеков Асан Заинелхриетович — магистрант Международного университета информационных технологий; тел. (727) 262-72-80; e-mail: a.murzabekov@gmail.com

Дата поступления — 4.06.12